УРАВНЕНИЕ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ НАД ПОЛЕМ Р-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Курбанбаев Т[1]., Ешниязова Д[1].

[1]Каракалпакский государственный университет им.Бердаха

Ключевые слова: p-адическое число, уравнение, степень, поле

Аннотация

В этом работе изучается p-адическое уравнения четвертой степени. Дано критерии разрешимости уравнения четвертой степени над полем p-адических чисел.

В настоящее время различные структуры изучаются над полем p-адических чисел. Теория p-адических чисел является одним из самых популярных и бурно развивающихся направлений современной математики. На данный момент известны p-адическая математическая физика, p-адическая теория вероятности, p-адические дифференциальные уравнения, p-адические динамические системы и др. p-адические числа впервые были введены в конце XIX века в работе немецкого математика К. Гензеля [1].

В данном работе изучено уравнение вида $x^4 = a$ над полем p-адических чисел.

Для доказательства основного результата данного работы следующая необходима лемма.

Лемма 1. Для простого p справедливо следующее равенство

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i\right)^4 = x_0^4 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(4x_0^3 x_k + N_k(x_0, x_1, ..., x_{k-1})\right)p^k, \qquad (1)$$

где $x_0 \neq 0$, $0 \leq x_j \leq p-1$, $j=0, 1, \dots$ и целые числа $N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ зависят лишь от $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$.

Доказательство. Левая часть равенства (1) равна следующему:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i\right)^4 = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3+i_4=k \\ 0\leq i_1,i_2,i_3,i_4\leq k}} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}\right)p^k. \qquad (2)$$

Пусть $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = k$. Если для одного из индексов $i_j = k$, то остальные равны нулю, т.е. члены, содержащие только $x_k p^k$, следующие:

$$x_0 \cdot x_0 \cdot x_0 \cdot x_k p^k, \quad x_0 \cdot x_0 \cdot x_k p^k \cdot x_0, \quad x_0 \cdot x_k p^k \cdot x_0 \cdot x_0, \quad x_k p^k \cdot x_0 \cdot x_0 \cdot x_0,$$

откуда следует $4x_0^3 x_k p^k$. А в остальных случаях появляются числа N_k, зависящие лишь от $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$. Лемма доказана.

Следующая теорема дает критерий разрешимости уравнений четвертой степени в поле Θ_p.

Пусть a – ненулевое p-адическое число и

$$a = p^{\gamma(a)}(a_0 + a_1p + a_2p^2 + \ldots),\ a_0 \neq 0,\ 0 \leq a_j \leq p\text{-}1,\ j=0,\ 1,\ldots$$

– его каноническое разложение.

Теорема 1. Для того, чтобы уравнение

$$x^4 = a, \tag{3}$$

имело решение $x \in \Theta_p$, необходимо и достаточно выполнение условий:

1) $\gamma(a)$ – кратно 4,
2) a_0 является вычетом степени 4 по модулю p, если $p \neq 2$;
   $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, если $p = 2$.

Доказательство. Необходимость**.** Если уравнение (3) имеет решение

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1p + x_2p^2 + \ldots),\ x_0 \neq 0,\ 0 \leq x_j \leq p\text{-}1,\ j=0,\ 1,\ldots,$$

то

$$p^{4\gamma(x)}(x_0 + x_1p + x_2p^2 + \ldots)^4 = p^{4\gamma(x)}\left(x_0^4 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(4x_0^3x_k + N_k(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})\right)p^k\right) =$$

$$= p^{\gamma(a)}(a_0 + a_1p + a_2p^2 + \ldots), \tag{4}$$

откуда следует, что $\gamma(a) = 4\gamma(x)$, т.е. $\gamma(a)$ кратно 4, и $a_0 \equiv x_0^4 \pmod p$ разрешимо в Θ_p, если $p \neq 2$.

При $p = 2$ имеем

$$a = 2^{4\gamma(x)}(1+x_1 2+x_2 2^2 + \ldots)^4 = 2^{4\gamma(x)}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(2^2x_k + N_k(1, x_1, \ldots, x_{k-1})\right)p^k\right] =$$

$$= 2^{4\gamma(x)}\left(1+\left(\frac{x_1 + x_1^2}{2} + x_2\right)2^4 + \ldots\right) \tag{5}$$

и, следовательно, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Достаточность**.** Пусть p-адическое число a удовлетворяет условиям 1) и 2). Построим решение x уравнения (3). Положим $\gamma(x) = \frac{1}{4}\gamma(a)$.

Пусть $p \neq 2$. Из (4) следует, что число x_0 должно удовлетворять условию

$$x_0^4 \equiv a_0 \pmod p,\ 1 \leq x_0 \leq p\text{-}1.$$

Такие x_0 существуют, так как $1 \leq a_0 \leq p\text{-}1$ и a_0 являются вычетом степени 4 по модулю p. Таким образом, существует $M_1(x_0)$ такое, что $x_0^4 = a_0 + M_1(x_0)p$.

Так как $4x_0^3$ не делится на p, тогда существует x_1 такое, что

$$4x_0^3x_1 + N_1(x_0) + M_1(x_0) \equiv a_1 \pmod p,\ 1 \leq x_1 \leq p-1.$$

Следовательно, существует $M_2(x_0, x_1)$ такое, что

$$4x_0^3x_1 + N_1(x_0) + M_1(x_0) = a_1 + M_2(x_0, x_1)p.$$

Продолжая данный процесс, мы находим существование x_n таких, что

$$4x_0^3 x_n + N_n(x_0,\dots,x_{n-1}) + M_n(x_0,\dots,x_{n-1}) \equiv a_n \pmod p,\ \ 1 \le x_n \le p-1,$$

где $M_{n+1}(x_0, \dots, x_n)$, $n \in N$ удовлетворяют следующим равенствам

$$4x_0^3 x_n + N_n(x_0,\dots,x_{n-1}) + M_n(x_0,\dots,x_{n-1}) = a_n + M_{n+1}(x_0,\dots,x_n)\, p. \qquad (6)$$

Из Леммы 1 и равенств (6) следует

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i\right)^4 = x_0^4 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(4x_0^3 x_k + N_k(x_0,\dots,x_{k-1})\right)p^k = a_0 + M_1(x_0)p +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k - M_k(x_0,\dots,x_{k-1}) + M_{k+1}(x_0,\dots,x_k)p\right)p^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k p^k.$$

Следовательно, имеем решение $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i$ уравнения (3) в каноническом виде.

Пусть p = 2. Пусть p=2. Из (5) следует, что уравнение

$$a_4 \equiv \frac{x_1 + x_1^2}{2} + x_2 \pmod 2,$$

которое для всех параметров x_1 и a_4 имеет решение x_2. Из равенства

$$2^{4\gamma(x)}(1 + x_1 2 + x_2 2^2 + \dots)^4 = 2^{4\gamma(x)}[1 + (x_1 + x_1^2)2^3 + ((x_1 + x_1^2)^2 + x_2)2^4 + \dots] =$$

$$= 2^{4\gamma(x)}[1 + (\frac{x_1 + x_1^2}{2} + x_2)2^4 + \dots] = 2^{\gamma(2)}(1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + a_4 p^4 + \dots)$$

следует, что остальные числа x_j должны удовлетворять условиям

$$x_j \equiv a_{j+2} + N_j'(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) \pmod 2,\ x_j = 0, 1,\ j = 3, 4, \dots,\ (7)$$

где целые числа N_j' зависят лишь от $x_0, x_1, \dots, x_{j-1}$. Очевидно, так как (1, 2)=1. Теорема доказана.

Литература

1. Vladimirov V.S., Volovic I.B., Zelenov E.I, p-adic Analysis and Mathematical Physics. // World Scientific. Singapore. -1994. - P. 352.

2. Виноградов И.М., Основы теории чисел, М.: Наука 1981. 176с.