

Abdullayeva Nodira Qamaraddin qizi

Nókis Mámleket pedagogika instituti studenti

Anotatsiya: *Bul maqalada Koshi formulasınan paydalanıp, integrallardı esaplawdı kórip shıǵamız. Koshi formulasınan paydalanıw múmkin bolǵan jaǵdaylardı kóremiz.*

Gilt sózler: *Koshi formulasi, integral, shegara, tiyisli noqat, oblastqa, dara-dara esaplaymız,*

1. Integraldı esaplań.

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z+i} dz$$

Shıǵarılıwı.

Shegaraǵa tiyisli a noqattı alamız

$$z+i=0 \Rightarrow z=-i \Rightarrow a=-i$$

Integraldı formuladan paydalanıp esaplaymız.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot f(a) \Rightarrow \int_{|z|=2} \frac{z^2}{z+i} dz = 2\pi i \cdot (-i)^2 = -2i\pi$$

Juwabı. $\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z+i} dz = -2i\pi$

2. Tómen degi integraldı esaplań:

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2} dz}{z^2-6z}$$

Sheshiliwi: Berilgen integraldı ápiwayılastıramız.

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2} dz}{z^2-6z} = \oint_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2} dz}{z(z-6)}$$

1) a nı tabamız:

$$z(z-6) = 0$$

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 6$$

Berilgen

$$|z-2| = |x+iy-2| = |(x-2)+iy| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 3$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 3^2 \quad O(2;0) \quad R=3$$

Oblastqa a nı tekserip kóremiz

Bunnan $a_1 = 0$ tiyisli $a_2 = 6$ tiyisli emes ekenligi kelip shıǵadı.

$$f(z) = \frac{e^{z^2} dz}{z^2 - 6z} = \frac{e^{z^2}}{z(z-6)}$$

$$2) \int_{\gamma_D} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i \cdot f(a)$$

Formuladan paydalanıp berilgen integraldı esaplaymız.

$$\int_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z-6} dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{z^2}}{z-6} \Big|_{a=0} = \frac{2\pi i}{-6} = -\frac{\pi i}{3}$$

$$\text{Juwabı: } \int_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2} dz}{z^2 - 6z} = -\frac{\pi i}{3}$$

3. Tómendegi integraldı esaplań.

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1}$$

Shıǵarılıwı.

Dáslep funkeiyanı apiwayılastıramız ham bólshek bólimin 0 qılıwshı noqatlardı tabamız.

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{z^2 - i^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}, \quad a = i, \quad a = -i$$

Tabılǵan noqatlar oblastqa tiyisli bolǵanı ushın formuladan paydalanıp dara-dara esaplayım.

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z-a} = 2\pi i \cdot f(a)$$

$$1) a = i, f(z) = \frac{1}{(z+i)}, \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1} = 2\pi i \cdot \frac{1}{(i+i)} = \pi$$

$$2) a = -i, f(z) = \frac{1}{(z-i)}, \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i \cdot \frac{1}{(-i-i)} = -\pi$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = \pi - \pi = 0$$

Juwbalı. $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = 0$

4. Tómenдегі integraldı esaplań.

$$\oint_{\gamma} \frac{sh(z+1)}{z^2+1} dz$$

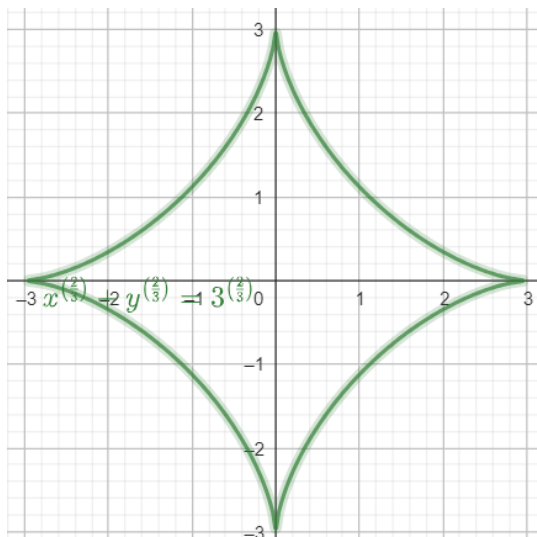
Shıǵarılıwı.

Dáslep funkciyanı apiwayılastıramız ham bólshek bólimin 0 qılıwshı noqatlardı tabamız.

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z^2-i^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}, \quad a=i, \quad a=-i$$

Tabılǵan noqatlar oblastqa tiyisli bolǵanı ushın formuladan paydalanıp dara-dara esaplayım.

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i \cdot f(a)$$



$$1) a = i, f(z) = \frac{sh(z+1)}{(z+i)}, \oint_{|z|=2} \frac{sh(z+1)dz}{z^2+1} = 2\pi i \cdot \frac{sh(i+1)}{(i+i)} = \pi sh(i+1)$$

$$2) a = -i, f(z) = \frac{sh(z+1)}{(z-i)}, \oint_{|z|=2} \frac{sh(z+1)dz}{z^2+1} = 2\pi i \cdot \frac{sh(-i+1)}{(-i-i)} = -\pi sh(1-i)$$

$$\oint_{\gamma} \frac{sh(z+1)dz}{z^2+1} = \pi sh(i+1) + \pi sh(i+1) = 2\pi sh(i+1) = i2\pi \sin 1ch1$$

Juwabi. $\oint_{\gamma} \frac{sh(z+1)dz}{z^2+1} = i2\pi \sin 1ch1$

5. Tómenđegi integraldı esaplań.

$$\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} dz$$

Sheshiliwi:

Berilgen funkciyamızdı apiwayılastıramız.

$$\frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} = \frac{\cos z}{(z - \pi)(z + \pi)}$$

Berilgen oblastqa a ni tekserip kóremiz.

$$(0, 0), r = 4, a = \pi, a = -\pi$$

1) a nı tawsaq $z - \pi = 0, a = \pi$

$$f(z) = \frac{\cos z}{z + \pi}, f(a) = \frac{\cos \pi}{\pi + \pi} = -\frac{1}{2\pi}$$

Berilgen integralımızdı esaplaymız

$$\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z - \pi} dz = 2\pi i \cdot f(a) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2\pi}\right) = -i$$

Bunda biz tómenđegi formuladan paydalanıq.

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = 2\pi i \cdot f(a)$$

2) a nı tawsaq $z + \pi = 0, a = -\pi$

$$f(z) = \frac{\cos z}{z - \pi}, f(a) = \frac{\cos(-\pi)}{-\pi - \pi} = -\frac{1}{2\pi}$$

Berilgen integralımızdı esaplaymız

$$\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z + \pi} dz = 2\pi i \cdot f(a) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2\pi}\right) = -i$$

$$\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} dz = -2i$$

Juwabi: $-2i$

6. Integraldı esaplań.

$$\oint_{|z+2|=2} \frac{zdz}{z^2-1}$$

Shıǵarılıwı.

Dáslep funkciya bolimin kobeytiwshilerge ajratamız.

$$\oint_{|z+2|=2} \frac{zdz}{z^2-1} = \oint_{|z+2|=2} \frac{zdz}{(z-1)(z+1)}$$

Shegaraǵa tiyisli a noqattı alamız

$$z-1=0 \Rightarrow z=1 \Rightarrow a=1, \quad f(z) = \frac{z}{z+1}$$

Integraldı formuladan paydalanıp esaplaymız.

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(z) \Rightarrow \oint_{|z+2|=2} \frac{zdz}{z^2-1} = 2\pi i \left(\frac{1}{2}\right)$$

Juwabı. $\oint_{|z+2|=2} \frac{zdz}{z^2-1} = 2\pi i \left(\frac{1}{2}\right)$

7. Tómenдеgi integraldı esaplań: $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$

1) a nı tabamız:

$$z(1-z)^3 = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 1$$

Berilgen

$$|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

$$x^2+y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad O(0;0) \quad R = \frac{1}{2}$$

Oblastqa a nı tekserip kóremiz:

Bunnan $a_1 = 0$ tiyisli $a_2 = 1$ tiyisli emes ekenligi kelip shıǵadı.

$$f^{(n-1)}(a) = (sh^2 z)^n = 2$$

2) $\oint_{\gamma_D} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i \cdot f(a)$ Formuladan paydalanıp berilgen integraldı

esaplaymız.

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{(1-z)^3} dz = 2\pi i$$

Juwabı: $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{(1-z)^3} dz = 2\pi i$

8. Tómendegi integraldı esaplań: $\oint_{|z|=1} \frac{sh^2 z dz}{z^3}$

1) a nı tabamız:

$$z^3 = 0$$

$$a = 0$$

$$n = 2$$

Berilgen

$$|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 = (1)^2 \quad O(0;0) \quad R = 1$$

Oblastqa a nı tekserip kóremiz:

Bunnan $a = 0$ tiyisliekenligi

kelip

shıǵadı.

$$(sh^2 z)'' = 2$$

$$(sh^2 z)' = 2chzshz$$

$$(2chzshz)' = 2(chz)' \cdot shz + 2chz \cdot (shz)' = -2sh^2 z + 2ch^2 z$$

$$2(ch^2 z + sh^2 z) = 2 \cdot 1 = 2$$

2) $\oint_{\gamma_D} \frac{f(z)}{(z-a)^n} dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n-1)}(a)$ Formuladan paydalanıp berilgen integraldı

esaplaymız.

$f(z) = sh^2 z$ funkciyadaneki ret tuwındı alamız.

$$(sh^2 z)'' = 2$$

$$(sh^2 z)' = 2chzshz$$

$$(2chzshz)' = 2(chz)' \cdot shz + 2chz \cdot (shz)' = -2sh^2 z + 2ch^2 z$$

$$2(ch^2 z + sh^2 z) = 2 \cdot 1 = 2$$

Bunnan $f^{(n-1)}(a) = (sh^2 z)'' = 2$ geteń.

$$\oint_{|z|=1} \frac{sh^2 z dz}{z^3} = \frac{2\pi i}{2!} \cdot 2 = 2\pi i$$

Juwabi: $\oint_{|z|=1} \frac{sh^2 z dz}{z^3} = 2\pi i$

9. Tómen degi integraldı esaplań. $\oint_{|z-1-i|=1} \frac{\sin \pi(z-1)}{z^2 - 2z + 2} dz$

Shıǵarılıwı.

Dásleb funkciyamız bolimin kobeytiwshilerge ajratamız.

$$\oint_{|z-1-i|=1} \frac{\sin \pi(z-1)}{z^2 - 2z + 2} dz = \oint_{|z-1-i|=1} \frac{\sin \pi(z-1)}{(z-1+i)(z-1-i)} dz$$

Bolshek bolimin 0 qiliwshi noqatlardı tabamız yaǵnıy a nı hám berilgen shegaramızǵa tiyisli yaki tiyisli emes ekenligin tekserip koremiz.

$$|z-1-i|=1, (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1^2, \quad z_0 = 1-i \quad z_0 = 1+i$$

Tiyisli noqat tawǵanımyzdan soń formuladan paydalanıp integraldı esaplaymız.

$$\oint_{|z-1-i|=1} \frac{\sin \pi(z-1)}{z^2 - 2z + 2} dz = \oint_{|z-1-i|=1} \frac{\sin \pi(z-1)}{z-1+i} dz = 2\pi i \frac{\sin \pi(1+i-1)}{1+i-1+i} = 2\pi i \frac{\sin \pi i}{2i} = \pi \sin \pi i = \pi ish \pi$$

Juwabı.

$$\oint_{|z-1-i|=1} \frac{\sin \pi(z-1)}{z^2 - 2z + 2} dz = \pi ish \pi$$

10. Integraldı esaplań.

$$\oint_{|z+2|=2} \frac{z dz}{z^2 - 1}$$

Shıǵarılıwı.

Dáslep funkciya bolimin kobeytiwshilerge ajratamız.

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^2 + 1} = \oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{(z-i)(z+i)}$$

Shegaraǵa tiyisli a noqattı alamız

$$1) z - i = 0, a = i, f(z) = \frac{1}{(z+i)}$$

$$2) z + i = 0, a = -i, f(z) = \frac{1}{(z-i)}$$

Integraldı formuladan paydalanıp esaplaymız.

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i \frac{1}{(i+i)} + 2\pi i \frac{1}{(-i-i)} = 0$$

Juwabi. $\oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^2+1} = 0$

11. Tómendegi integraldı esaplań.

$$\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} dz$$

Sheshiliwi: Berilgen integaldı ápiwaylastıramız.

$$\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} dz = \oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{(z-\pi)(z+\pi)} dz$$

1) Funkciyanıń a_1 hám a_2 yaǵnıy shetki noqatların anıqlap alamız.

$$(z-\pi)(z+\pi) = 0$$

$$a_1 = \pi = 3,14 \quad a_2 = -\pi = -3,14$$

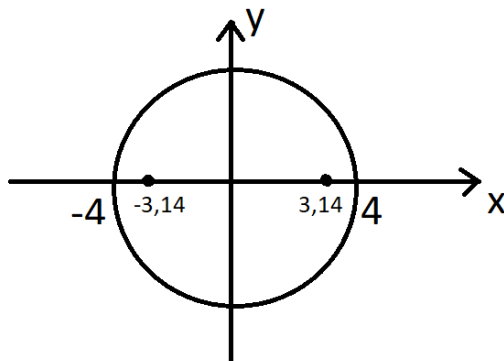
Berilgen

$$|z| = 4$$

$$|x+iy| = 4$$

$$x^2 + y^2 = 4^2 \quad O(0;0) \quad R = 4$$

Oblastqa a_1 hám a_2 ni tekserip kóremiz:



Bunnan $a_1 = \pi = 3,14$ $a_2 = -\pi = -3,14$ noqatlardıń ekewide tiyisli ekenligi kelip shıǵadı.

$$\int_D \frac{f(z)}{(z+a_1)(z+a_2)} = \left[\int_{a_1} \frac{f(z)}{(z+a_2)} + \int_{a_2} \frac{f(z)}{(z+a_1)} \right] \text{ formuladan paydalanıp integraldi}$$

esaplaymız.

$$1) a_1 = \pi \quad f(z) = \frac{\cos z}{z + \pi}$$

$$\int_{a_1} \frac{f(z)}{(z+a_2)} = \int_{\pi} \frac{\cos z}{z - \pi} = 2\pi i \cdot \frac{\cos z}{z + \pi} \Big|_{\pi} = 2\pi i \cdot \frac{\cos \pi}{2\pi} = -i$$

$$2) a_2 = -\pi \quad f(z) = \frac{\cos z}{z - \pi}$$

$$\int_{a_2} \frac{f(z)}{(z+a_1)} = \int_{-\pi} \frac{\cos z}{z + \pi} = 2\pi i \cdot \frac{\cos z}{z - \pi} \Big|_{-\pi} = 2\pi i \cdot \frac{\cos(-\pi)}{-2\pi} = i$$

$$\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} dz = \oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{(z - \pi)(z + \pi)} dz = -i + i = 0$$

Juwapı: 0

12. Tómedegi integraldı esaplań. $\int_{|z|=3} \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-2)} dz$

Shıǵarılıwı.

Funkciyamızdı eki boleкке bolip esaplaymız yaǵnıy $(z+1)$ hám $(z-2)$ boyınsha.

1) Funkciyamızdan a , n hám $f(z)$ lerdı anıqlaymız.

$$z+1=0 \Rightarrow z=-1 \Rightarrow a=-1, n=1$$

$$z+1=0 \Rightarrow z=-1 \Rightarrow a=-1, n=1, f(z) = \frac{\cos z}{(z-2)}$$

$n=1$ bolǵanı ushın $f(z)$ ten n marte tuwındı alamız hám esaplaymız.

$$f'(z) = \frac{(\cos z)'(z-2) - \cos z(z-2)'}{(z-2)^2} = \frac{-\sin z(z-2) - \cos z}{(z-2)^2}$$

$$f'(a) = \frac{-\sin(-1)(-1-2) - \cos(-1)}{(-1-2)^2} = \frac{-3\sin(1) - \cos(1)}{9}$$

Tómendegi formuladan paydalanıp integralımızdı esaplaymız.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a) \quad (1)$$

$$\int_{|z|=3} \frac{\cos z}{(z+1)(z-2)} dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot \frac{-3\sin(1) - \cos(1)}{9} = \frac{2\pi i}{9} \cdot (-3\sin(1) - \cos(1))$$

2) Funkciyamızdan a , n hám $f(z)$ lerdí anıqlaymız.

$$z - 2 = 0 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow a = 2, n = 0$$

$n = 0$ bolǵanı ushın $f(z)$ ten tuwındı alamay esaplaymız.

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z+1)^2} \Rightarrow f(a) = \frac{\cos 2}{(2+1)^2} = \frac{\cos 2}{9}$$

$$\int_{|z|=3} \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-2)} dz = 2\pi i \cdot \frac{\cos 2}{9}$$

1-hám 2-juwaplardı qosqan halda ulıwma juwaptı tabamız.

$$\int_{|z|=3} \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-2)} dz = \frac{2\pi i}{9} \cdot (-3\sin(1) - \cos(1)) + 2\pi i \cdot \frac{\cos 2}{9} = \frac{2\pi i}{9} \cdot (\cos 2 - 3\sin(1) - \cos(1))$$

Juwabi.
$$\int_{|z|=3} \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-2)} dz = \frac{2\pi i}{9} \cdot (\cos 2 - 3\sin(1) - \cos(1))$$

Paydalanılǵan ádebiyatlar :

1. A. Sadullayev; G. Xudaybergenov; X. Mansurov; A. miyrasxoriv; T. To'ychiyev " Matematika analiz ursidan mısal hám máseleler kompleksi 3 (kompleks analiz) " Tas. " Ózbekstan". 2000.
2. B. Otemuratov " Kompleks analiz". " noshir" baspa 2018.
3. Dennis G. Zill; Patrick D. Shanahan " Kompleks analiz ve uygulamaları" Turkiya. 2013.
4. Dalinger V. A., Simonjenkov S. D. " Kompleksniy analiz" 2-ye izd., ispr. i dop.- Moskva : Izdatel'stvo Yurayt, 2024.- 143 s.- (Visshee obrazovanie).- ISBN 978-5-534-08399 -6.- Tekst : elektronniy // Obrazovatel'naya platforma Yurayt [sayt].- URL: <https://urait.ru/bcode/539459> (data obrasheniya: 26. 06. 2024).