Laplas akslantirishi yordamida matematik fizika masalalarini yechish

Shamuratov Damir

Berdaq nomidagi Qoraqalpoq Davlat Universiteti

1-ta'rif: t o'qining xohlagan chekli intervalida $f(x)$ funksiya integrallanuvchi [1]

1) Barcha $t<0$ lar uchun , $f(t)=0$

2) $f(t)$-chegaralangan osuvchi funksiya, darajali funksiyaga solishtirganda teziroq o'smaydi, yaniy shunday $M>0, D\geq 0$ sonlari bor bo'lib har qanday t lar uchun $|f(t)|<Me^{Dt}$ shartini qanoatlandiradigan t haqiyqiy argumentli $f(t)$ xohlagan kompleks funksiyaga *orginal funksiya* deb ataladi.

2-ta'rif: Haqiyqiy o'zgaruvchili $f(t)$ funksiyaning *Laplas akslantirishi* deb $p=s+iw$ kompleks o'zgaruvchili

$$F(p)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt,$$

tenglik bilan aniqlanuvchi $F(p)$ funksiyaga aytiladi. Bu tenglikning ong tamoni *Laplas* integrali deb ataladi. $f(t)$ funksiya Laplas akslantirishining *orginali*, $F(p)$ funksiya esa $f(t)$ funksiyaning *tasviri* deb ataladi.

$f(t)=e^{\lambda t}$ funksiyaning tasvirini, yaniy Laplas akslantirishini topamiz [2]:

$$F(p)=\int_o^\infty e^{\lambda t}e^{-pt}dt=\int_o^\infty e^{-(p-\lambda)t}dt=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{-(p-\lambda)t}}{p-\lambda}\right)\Bigg|_0^b=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-(p-\lambda)b}}{p-\lambda}+\frac{1}{p-\lambda}e^0\right]=\frac{1}{p-\lambda},$$

demak, $e^{\lambda t}$ J $\frac{1}{p-\lambda}$, xususiy hollarda $\lambda=0$ bolganda $\Rightarrow 1$ J $\frac{1}{p}$ va

c J $\frac{c}{p}$ $c=const$.

3-ta'rif: Kompleks o'zgaruvchili $F(p)$ funksiyaning *teskari Laplas akslantirishi* deb, haqiyqiy o'zgaruvchili

$$f(t)=L^{-1}\{F(p)\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}e^{pt}F(p),$$

funksiyaga aytiladi, bunda s-haqiyqiy son. Bu tenglikning ong tamoni *Bromvich integrali* deb ataladi.

Laplas akslantirishi yordamida quyidagi chegaraviy masalani yechishni ko'rib chiqamiz [3]:

$$U_x+U_y=2x+2y,\quad x>0,\ y>0, \tag{1}$$

$$U(0,y)=3,\quad y>0, \tag{2}$$

$$U(x,0)=3,\quad x>0, \tag{3}$$

Yechilishi:

$x-$o'zgaruvchi bo'yicha (1) tenglamaga Laplas akslantirishini foydalanamiz, y ni parametir deb olamiz. $U(x,y)\overset{x}{\risingdotseq}V(p,y)$ bo'lsin, unda:

$$U_y(x,y)\overset{x}{\risingdotseq}V_y(p,y)=\frac{\partial V(p,y)}{\partial y}.$$

Orginalni differensiallash xossasiga ko'ra (2) ni hisobga olsak

$$U_x(x,y)\overset{x}{\risingdotseq}pV(p,y)-U(0,y)=pV(p,y)-3.$$

(1)-tenglamaning ong tarafini va (3)-shartdan foydalansak

$$2x+2y\overset{x}{\risingdotseq}\frac{2}{p^2}+\frac{2y}{p},\ \text{ va }\ V(p,0)=\frac{3}{p}.$$

Demak, Laplas akslantirishi yordamida (1)-(3) chegaraviy masalani quyidagi Koshi masalasiga olib keldik:

$$\frac{\partial V(p,y)}{\partial y}+pV(p,y)=\frac{2}{p^2}+\frac{2y}{p}+3,\quad y>0, \tag{4}$$

$$V(p,0)=\frac{3}{p}, \tag{5}$$

(4)-tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$V(p,y)=Ce^{-py}+\frac{2y}{p^2}+\frac{3}{p},$$

bunda $C-$o’zgarmas sonni aniqlash uchun (5)-shartdan foydalanamiz. Shunda

$$V(p,y)=\frac{2y}{p^2}+\frac{3}{p}, \qquad (6)$$

bo’ladi. (6) ga teskari Laplas akslantirishini foydalansak berilgan tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo’ladi:

$$U(x,y)=2xy+3.$$

Foydalanilgan adabiyotlar

[1]. Лере Ж. Обобщенное преобразование Лапласа - Москва: Мир,1969.-111 с.

[2]. Злотарев И.Д.Применение метода ,упрощающего обратное преобразование Лапласа при исследовании динамики колебательных систем.- Омск: ОмГУ, 2004.- 99 с.

[3]. Салохитдинов М.С., Исломов Б.И. Математик физика тенгламалари фанидан масалалар тўплами.- Т.:Mumtoz soz, 2010.