Integrallardı esaplaw usılları

Abdullayeva Nodira Qamaraddin qizi

Nókis Mámleket pedagogika institutı studenti

Anotatsiya: *Bul maqalada hár túrlı túrdegi integrallardı esaplaw usılları kórip shıǵıladı. Bul integrallardı esaplawda tiykarlanıp Koshi formulasınan, bóleklab integrallaw usılınan hám basqa bir neshe usıllardan paydalanildi. Integrallardı esaplawdı qolaylastırıw ushın biz sol intergralni shıǵarıwǵa maslanǵan usıllardan paydalanǵanimiz maqsetke muwapıq boladı, álbette.*

Gilt sóz: *Integral, Koshi formulası, bóleklab integrallaw, oblast, tuwındı, f (z), n-dárejeli funksiya, hám basqalar.*

Hár túrlı interallarni esaplawdı birpara usillari boyınsha esaplanǵan mısallardı kórip shıǵamız.

1. Tómendegi integraldı esaplań.

$$\oint_\gamma ydz\,,\quad \gamma : |z-a| = R$$

Shıǵarılıwı.

Dáslep t nıń oblastın tawamız.

$$|z-a| = R,\quad z = a + \mathrm{R}e^{it} = a + R(\cos t + i\sin t),\quad t \in [0;2\pi]$$

$$a \in \mathbb{C}\,,\quad z = x + iy = a + R\cos t + iR\sin t$$

Integral esaplawımız ushın x hám y lardan tuwındı alamız.

$$x = a + R\cos t \quad y = R\sin t$$
$$dx = -R\sin tdt \quad dy = R\cos tdt$$

Joqarıdaǵılardan paydalanıp integral esaplaymız.

$$\oint_\gamma ydz = \int y(dx + idy) = \int ydx + i\int ydy = -\int_0^{2\pi} R^2\sin tdt + i\int_0^{2\pi} R^2 \sin t\cos tdt =$$

$$= -R^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt + \frac{i}{2}R^2\int_0^{2\pi}\sin 2tdt = -R^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}\right)dt + \frac{iR^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2tdt =$$

$$= -R^2\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} - \frac{iR^2}{2}\left[\cos 2t\right]_0^{2\pi} = -R^2\left[\pi - 0\right] - \frac{iR^2}{2}\left[\cos 4\pi - \cos 0\right] = -R^2\pi$$

$$\oint_\gamma ydz = -R^2\pi$$

Juwabı. $\oint_\gamma ydz = -R^2\pi$

2. $\oint_{|z-1|=1} \frac{\cos z}{z-\pi}dz$

Shıǵarılıwı.

3. $\oint_{|z-1|=1} \frac{\cos z}{z-\pi}dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-1|=1} \frac{\cos z}{z-\pi}dz = 0$

4. $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}dz = \begin{Bmatrix} f(z), a \in D \\ 0, a \notin D \end{Bmatrix}$

5. $z-\pi = 0, z = \pi, \notin \{|z-1| = 1\}$

Juwabı. $\oint_{|z-1|=1} \frac{\cos z}{z-\pi}dz = 0$, $\begin{Bmatrix} f(z), a \in D \\ 0, a \notin D \end{Bmatrix}$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}+i} \sin zdz$

Shıǵarılıwı.

Dáslep $\int \sin zdz = -\cos z$ ekenliginen paydalanıp integral esaplaymız.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}+i} \sin zdz = (-\cos z)_0^{\frac{\pi}{2}+i} = -(\cos(\frac{\pi}{2}+i) - \cos 0)$$

Bul jerde $\cos(\frac{\pi}{2}+i)$ dı esaplawimız ushın tomendegi formulalardan paydalanamız.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin iz = ishz, \quad \cos iz = chz$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+i) = \cos(\frac{\pi}{2})\cos(i) - \sin(\frac{\pi}{2})\sin(i) = 0\cdot ch1 - 1\cdot i\cdot sh1 = -ish1$$

Esaplawdan korınıp turıpı natiyje $-ish1$ ekenligi, usıdan paydalanıp inegraldı esaplaymız.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}+i} \sin z dz = (-\cos z)_0^{\frac{\pi}{2}+i} = -(\cos(\frac{\pi}{2}+i) - \cos 0) = 1 - (-ish1) = 1 + ish1$$

Juwabı. $\int_0^{\frac{\pi}{2}+i} \sin z dz = 1 + ish1$

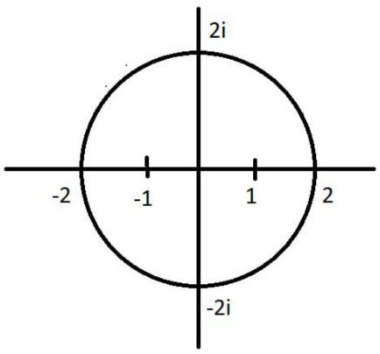
4. $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1} dz$

Sheshiliwi:

Berilgen integralımızdı apiwayilastiramız.

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1} dz = i\pi(e - \frac{1}{e})$$

Berilgen oblastqa a ni tekserip kóremiz.



1) a nı tawsaq $z-1=0, z=1, a=1$

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)}, \quad f(a) = \frac{e^1}{(1+1)}, \quad f(a) = \frac{e}{2}$$

Berilgen integralımızdı esaplaymiz

$$\oint_{|z|=2} \frac{\frac{e^z}{(z+1)}}{(z-1)} dz = 2\pi i \frac{e}{2} = ei\pi$$

Bunda biz tómendegi formuladan paydalanıq.

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i \cdot f(a)$$

2) a nı tawsaq $z+1=0, z=-1, a=-1$

$$f(z)=\frac{e^z}{(z-1)},\quad f(a)=\frac{e^{-1}}{(-1-1)},\quad f(a)=\frac{e^{-1}}{-2}$$

Berilgen integralımızdı esaplaymiz

$$\oint_{|z|=2}\frac{\frac{e^z}{(z-1)}}{(z+1)}dz=2\pi i\left(-\frac{1}{2e}\right)=-\frac{i\pi}{e}$$

$$\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z^2-1}dz=ei\pi-\frac{i\pi}{e}=i\pi\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

Juwabı: $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z^2-1}dz=i\pi\left(e-\frac{1}{e}\right)$.

5. $\int sh(az)dz$

Sheshiliwi:

Dáslep $shaz$ hám $chaz$ manislerin korip shıqsaq.

$$shaz=\frac{e^{az}-e^{-az}}{2},\quad chaz=\frac{e^{az}+e^{-az}}{2}$$

$shaz$ mánisin ornına qoyıp integral esaplaymız.

$$\int\frac{e^{az}-e^{-az}}{2}dz=\int\left(\frac{e^{az}}{2}-\frac{e^{-az}}{2}\right)dz=\int\frac{e^{az}}{2}dz-\int\frac{e^{-az}}{2}dz=\frac{1}{a}\cdot\frac{e^{az}}{2}-\left(-\frac{1}{a}\cdot\frac{e^{-az}}{2}\right)=\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{e^{az}+e^{-az}}{2}\right)$$

$chaz=\frac{e^{az}+e^{-az}}{2}$ ten paydalanıp juwmaq shıǵaramız.

$$\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{e^{az}+e^{-az}}{2}\right)=\frac{1}{a}\cdot chaz$$

$$\int\frac{e^{az}-e^{-az}}{2}dz=\frac{1}{a}\cdot chaz$$

Juwabı: $\int sh(az)dz=\frac{1}{a}chaz$

6. Integraldı esaplań:

$\int_\gamma \operatorname{Im} zdz,\ bunda\ \gamma$ bası 0 hám aqırı $2+i$ noqatta bolǵan tuwrı sızıq kesindisi.

Sheshiliwi:

$$\int_\gamma \operatorname{Im} zdz=\int_\gamma y(dx+idy)=\int_0^2\frac{x}{2}dx+i\int_0^1 ydy=\left.\frac{x^2}{4}\right|_0^2+i\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1=1+\frac{i}{2}$$

Juwabı: $1+\frac{i}{2}$

7. Tómedegi integraldı esaplań. $\int\limits_{|z|=3}\frac{\cos z}{(z+1)^2(z-2)}dz$

Shıǵarılıwı.

Funkciyamızdı eki bolekke bolip esaplaymız yaǵnıy $(z+1)$ hám $(z-2)$ boyınsha.

1)Funkciyamızdan a, n hám $f(z)$ lerdi anıqlaymız.

$$z+1=0\Rightarrow z=-1\Rightarrow a=-1, n=1$$

$$z+1=0\Rightarrow z=-1\Rightarrow a=-1, n=1,\ f(z)=\frac{\cos z}{(z-2)}$$

$n=1$ bolǵanı ushın $f(z)$ ten n marte tuwındı alamız hám esaplaymız.

$$f'(z)=\frac{(\cos z)'(z-2)-\cos z(z-2)'}{(z-2)^2}=\frac{-\sin z(z-2)-\cos z}{(z-2)^2}$$

$$f'(a)=\frac{-\sin(-1)(-1-2)-\cos(-1)}{(-1-2)^2}=\frac{-3\sin(1)-\cos(1)}{9}$$

Tómendegi formuladan paydalanıp integralımızdı esaplaymız.

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(a) \quad (1)$$

$$\int\limits_{|z|=3}\frac{\cos z}{(z+1)(z-2)}dz=\frac{2\pi i}{1!}\cdot\frac{-3\sin(1)-\cos(1)}{9}=\frac{2\pi i}{9}\cdot(-3\sin(1)-\cos(1))$$

2) Funkciyamızdan a, n hám $f(z)$ lerdi anıqlaymız.

$$z-2=0\Rightarrow z=2\Rightarrow a=2, n=0$$

$n=0$ bolǵanı ushın $f(z)$ ten tuwındı alamay esaplaymız.

$$f(z)=\frac{\cos z}{(z+1)^2}\Rightarrow f(a)=\frac{\cos 2}{(2+1)^2}=\frac{\cos 2}{9}$$

$$\int\limits_{|z|=3}\frac{\cos z}{(z+1)^2(z-2)}dz=2\pi i\cdot\frac{\cos 2}{9}$$

1-hám 2-juwaplardi qosqan halda ulıwma juwaptı tabamız.

$$\int\limits_{|z|=3}\frac{\cos z}{(z+1)^2(z-2)}dz=\frac{2\pi i}{9}\cdot(-3\sin(1)-\cos(1))+2\pi i\cdot\frac{\cos 2}{9}=\frac{2\pi i}{9}\cdot(\cos 2-3\sin(1)-\cos(1))$$

Juwabı. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-2)}dz = \frac{2\pi i}{9}\cdot(\cos 2 - 3\sin(1) - \cos(1))$

Paydalanılǵan ádebiyatlar :

1. A. Sadullayev; G. Xudaybergenov; X. Mansurov; A. miyrasxoriv; T. To'ychiyev " Matematia analiz ursidan mısal hám máseleler kompleksi 3 (kompleks analiz) " Tas. " Ózbekstan". 2000.

2. B. Otemuratov " Kompleks analiz". " noshir" baspa 2018.

3. Dennis G. Zill; Patrick D. Shanahan " Kompleks analiz ve uygulamalari" Turkiya. 2013.

4. Dalinger V. A., Simonjenkov S. D. " Kompleksniy analiz" 2-ye izd., ispr. i dop.- Moskva : Izdatel'stvo Yurayt, 2024.- 143 s.- (Visshee obrazovanie).- ISBN 978-5-534-08399 -6.- Tekst : elektronniy // Obrazovatel'naya platforma Yurayt [sayt].- URL: https://urait. ru/bcode/539459 (data obrasheniya: 26. 06. 2024).