Loran qatarı boyınsha máselelerdi islew

Abdullayeva Nodira Qamaraddin qizi

Nókis Mámleket pedagogika institutı student

Anotatsiya: *Loran qatarlar hám olar boyınsha berilgen máselelerdi islew usillari haqqında bir qansha bilimlerdi alıw hám funksiyalardı Loran qatarǵa jayıwda járdem beretuǵın maqala esaplanadı.*

Gilt sózler: *Loran qatarlar, funksiyalardı Loran qatarlarǵa jayıw, jaqınlasıw oblasti, galamorf funksiya, halqada, noqat átirapında.*

Loran qatarı boyınsha máselelerdi islew boyınsha túsiniklerge iye bolamız.

1.Tómendegi misallarda $f(z)$ funkciyanı korsetilgen aylanada yaki noqattıń átrapindaǵı Loran qatarına jayıń. Támendegi jaǵdayda qatardıń jaqınlasıw oblastın tabıń.

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$$

Shıǵarılıwı.

Formuladan paydalanıp Loran qatarına jayamız.

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}z^n=-\sum_{n=0}^{\infty}z^{n-1}=\sum_{n=-1}^{\infty}z^n$$

Juwabı. $\sum\limits_{n=-1}^{\infty}z^n$

2. $f(z)$ funkciyanı kórsetilgen kalcoda Loran qatarına jayıń:

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)},V=\{1<|z|<2\}$$

Sheshiliwi: Kórinip turǵanınday, berilgen funkciya $V=\{1<|z|<2\}$ kalcoda galamorf bolǵanı ushın onı Loran qatarına jayıw múmkin boladı.

Dáslep $f(z)$ funkciyanı

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}=\frac{A}{z^2+1}+\frac{B}{z^2-4}=\frac{Az^2-4A+Bz^2+B}{(z^2+1)(z^2-4)}$$

$$\begin{cases}(A+B)z^2=0\\ B-4A=1\end{cases}\qquad A+B=0$$

$$A+B=0$$
$$A=-B$$
$$B-4A=1$$
$$B+4B=1$$
$$B=\frac{1}{5}$$

$f(z)=\dfrac{1}{-5(z^2+1)}+\dfrac{1}{5(z^2-4)}$ kórinisinde jazıp alamız.Soń bul teńliktiń oń tárepindegi funkciyalardiń hár birin qatarǵa jayamız:

$$f(z)=\frac{1}{-5(z^2+1)}+\frac{1}{5(z^2-4)}=-\left(\frac{1}{5z^2(1-(-\frac{1}{z^2}))}+\frac{1}{5(1-\frac{z^2}{4})\cdot 4}\right)=$$

$$=-\frac{1}{z^2\cdot 5}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{1}+\frac{1}{5\cdot 4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{4^n}=\sum_{n=-1}^{-\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n-2}}{5}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{5\cdot 4^{2n-1}}$$

Juwabı: $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}=\sum\limits_{n=-1}^{-\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{z^{2n-2}}{5}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{z^{2n}}{5\cdot 4^{2n-1}}$

3. Tómendegi misallarda $f(z)$ funkciyanı korsetilgen aylanada yaki $z=z_0$ noqattıń átrapindaǵı Loran qatarına jayıń. Támendegi jaǵdayda qatardıń jaqınlasıw oblastın tabıń.

$$f(z)=\frac{1+\cos z}{z^4},\, z_0=0$$

Sheshiliwi:

$$\frac{1+\cos z}{z^4}=\frac{1}{z^4}+\frac{\cos z}{z^4}=\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{z^4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-4}}{(2n)!}=\frac{2}{z^4}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-4}}{(2n)!}$$

Juwabı: $\dfrac{2}{z^4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n-4}}{(2n)!}$

4. Tómendegi misallarda $f(z)$ funkciyanı korsetilgen aylanada yaki noqattıń átrapindaǵı Loran qatarına jayıń. Támendegi jaǵdayda qatardıń jaqınlasıw oblastın tabıń.

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1},z_0=1$$

Shıǵarılıwı.

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{(1-(z-1))(\frac{z^2+1}{2-z})}=\frac{1}{1-(z-1)}\cdot\frac{2-z}{z^2+1}=\frac{2-z}{z^2+1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

Juwabı. $f(z)=\frac{1}{z^2+1}=\frac{2-z}{z^2+1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$

5. $f(z)$ funkciyanı kórsetilgen kolcoda yaki kórsetilgen $z=z_0$ noqattıń átirapında Loran qatarına jayıń.

$$f(z)=\frac{2z-3}{z^2-3z+2};V=\{0<|z-2|<1\}$$

Berilgen furkciya $V=\{0<|z-2|<1\}$ kolcoda golomorf. Sol sebeoli, onı Loran qatarına jayıwǵa boladı.

Dáslep $f(z)$ funkciyanı

$$f(z)=\frac{2z-3}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}$$

kórinisinde jazıp alamız. Soń bul teńliktiń oń tárepindegi funkciyanıń hár birin qatarǵa jayamız:

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1+(z-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$$

Bulqatar $\{|z-2|<1\}$ dajaqınlasadı.

Bul qatardıń jayılıwı teylor qatarınıń jayılıwınan kelip shıǵadı:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...$$

Juwabı: $\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$

6. Tómendegi misallarda $f(z)$ funkciyanı korsetilgen aylanada yaki noqattıń átrapindaǵı Loran qatarına jayıń. Támendegi jaǵdayda qatardıń jaqınlasıw oblastın tabıń.

$$f(z)=\frac{e^z}{z^3},z_0=0$$

Shıǵarılıwı.

$$\frac{1}{z^3}e^z=\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-3}}{n!}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z^1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

$$f(z)=\frac{e^z}{z^3}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z^1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

Juwabı.

$$f(z)=\frac{e^z}{z^3}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z^1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

7. To'mendegi esaplarda $f(z)$ funksiyani ko'rsetilgen halqada ya'ki ko'rsetilgen $z=z_0$ noqattin' atrapinda Loran qatarina jayin'. Kiyingi jag'dayda qatardin' jaqinlasiw oblastin tabin'.

$$f(z)=\frac{z+2}{z^2-4z+3}\;,\qquad v=\{2\prec|z-1|\prec+\infty\}$$

Sheshiliwi:

$$\frac{z+2}{z^2-4z+3}=\frac{-\frac{3}{2}}{z-1}+\frac{\frac{5}{2}}{z-3}=\frac{-\frac{3}{2}}{z-1}+\frac{\frac{5}{2}}{2(1-\frac{z-1}{2})}=\frac{-\frac{3}{2}}{z-1}+\frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{z-1}{2}}=-\frac{3}{2}\bullet\frac{1}{z-1}+\frac{5}{4}\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{2}{z-1})^n=-\frac{3}{2}\bullet\frac{1}{z-1}+\frac{5}{4}$$

$$\frac{2^1}{(z-1)^1}+\frac{5}{4}\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{2^n}{(z-1)^n}=-\frac{3}{2}\bullet\frac{1}{z-1}+\frac{5}{2}\bullet\frac{1}{z-1}+\frac{5}{4}\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{2^n}{(z-1)^n}=\frac{1}{z-1}(\frac{5}{2}-\frac{3}{2})+5\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{2^{n-2}}{(z-1)^n}=\frac{1}{z-1}+5\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{2^{n-2}}{(z-1)^n}=\frac{1}{z-1}+5\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{2^{n-2}}{(z-1)^n}$$

Ju'wabi: $\frac{1}{z-1}+5\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{2^{n-2}}{(z-1)^n}$

8. To'mendegi esapda $f(z)$ funksiyani ko'rsetilgen halqada ya'ki ko'rsetilgen $z=z_0$ noqattin' atirapinda Loran qatarina jayin'. Kiyingi jag'dayda qatardin' jaqinlasiw oblastin tabin'.

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}\,,\qquad V=\{0<|z-i|<2\}$$

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{z^2-i^2}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\frac{2}{2(z-i)(z+i)}=\frac{i}{2(z+i)}-\frac{i}{2(z-i)}=$$

$$\frac{1}{2(\frac{z+i}{i})}-\frac{i}{2(z-i)}=\frac{1}{4(\frac{z+i}{2i})}-\frac{i}{2(z-i)}=\frac{1}{4(\frac{2i+z-i}{2i})}-\frac{i}{2(z-i)}=$$

$$\frac{1}{4(1+\frac{z-i}{2i})}-\frac{i}{2(z-i)}=\frac{1}{4(1-(-\frac{z-i}{2i}))}-\frac{i}{2(z-i)}=-\frac{i}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\frac{1}{1-(-\frac{z-i}{2i})}=-\frac{i}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-i}{2i})^n$$

Juwabı: $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}=-\dfrac{i}{2(z-i)}+\dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{z-i}{2i})^n$

9. Tómendegi misallarda $f(z)$ funkciyanı korsetilgen aylanada yaki noqattıń átrapindağı Loran qatarına jayıń. Támendegi jağdayda qatardıń jaqınlasıw oblastın tabıń.

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-4)^2}, V=\{4<|z+2|<\infty\}.$$

Shığarılıwı.

Dáslep funkciyanı apiwayılastıramız.

$$\frac{1}{(z-2)^2(z+2)^2}=\frac{1}{z-2+4-4}\cdot\frac{1}{(z+2)^2(z-2)}=\frac{1}{z+2-4}\cdot\frac{1}{(z+2)^2(z-2)}=$$

$$=\frac{1}{\frac{z+2}{4}-1}\cdot\frac{1}{4(z+2)^2(z-2)}=\frac{1}{1-\frac{z+2}{4}}\cdot\frac{1}{4(z+2)^2(z-2)}$$

Formuladan paydalanıp Loran qatarına jayamız.

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)^2(z+2)^2}=\frac{-1}{1-\frac{z+2}{4}}\cdot\frac{1}{4(z+2)^2(z-2)}=\frac{-1}{4(z+2)^2(z-2)}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(z+2)^n}=\frac{-1}{(z-2)}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{(z+2)^{n-2}}$$

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)^2(z+2)^2}=\frac{-1}{(z-2)}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{(z+2)^{n-2}}$$

Juwabı. $f(z)=\dfrac{-1}{(z-2)}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^{n-1}}{(z+2)^{n-2}}$

10. Berilgen $f(z)$ funkciyanı kórsetilgen $z=z_0$ noqattıń átirapında Loran qatarına jayıń:

$$f(z)=\frac{\sin^2 z}{z}, \quad z_0=0$$

Sheshiliwi: Dáslep $f(z)$ funkciyanı $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1-\cos 2z}{2}=\dfrac{1}{2z}-\dfrac{1}{2z}\cdot\cos 2z$ kórinisinde jazıp alamız.Soń bul teńliktiń oń tárepindegi funkciyalardiń hár birin qatarğa jayamız:

$$\frac{1}{2z}-\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{2z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}\cdot z^{2n-1}}{(2n)!}=$$

$$=\frac{1}{2z}-\frac{2^{-1}\cdot z^{-1}}{1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}\cdot z^{2n-1}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}\cdot z^{2n-1}}{(2n)!}$$

Juwabı: $f(z)=\frac{\sin^2 z}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}\cdot z^{2n-1}}{(2n)!}$

11. $f(z)=\frac{\sin z}{z}, \quad z_0=0$

Shıǵarılıwı.

Tómendegi formuladan paydalanǵan halda qatarga jayamız.

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\sin z=z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

Juwabı. $f(z)=\frac{\sin z}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$

12. Tómendegi misallarda $f(z)$ funkciyanı korsetilgen aylanada yaki $z=z_0$ noqattıń átrapindaǵı Loran qatarına jayıń. Támendegi jaǵdayda qatardıń jaqınlasıw oblastın tabıń.

$$f(z)=z^4\cos(\frac{1}{z}), \quad z_0=0$$

Shıǵarılıwı.

Tómendegi formuladan paydalanıp loran qatarına jayamız.

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$f(z)=z^4\cos(\frac{1}{z})=z^4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac{1}{z})^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z)^{4-2n}}{(2n)!}$$

Juwabı. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z)^{4-2n}}{(2n)!}$

13. Berilgen $f(z)$ funkciyanı kórsetilgen $z=z_0$ noqattıń átirapında Loran qatarına jayıń:

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)};\qquad z_0=0$$

Sheshiliwi: Dáslep $f(z)$ funkciyanı kórinisinde jazıp alamız.Soń bul teńliktiń oń tárepindegi funkciyalardiń hár birin qatarǵa jayamız:

$$\frac{1}{2z}-\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{2z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}\cdot z^{2n-1}}{(2n)!}=$$

$$=\frac{1}{2z}-\frac{2^{-1}\cdot z^{-1}}{1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}\cdot z^{2n-1}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}\cdot z^{2n-1}}{(2n)!}$$

Juwabı: $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}\cdot z^{2n-1}}{(2n)!}$

14. To'mendegi esapda $f(z)$ funksiyani ko'rsetilgen halqada ya'ki ko'rsetilgen $z=z_0$ noqattin' atirapinda Loran qatarina jayin'. Kiyingi jag'dayda qatardin' jaqinlasiw oblastin tabin'.

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2},\qquad V=\{0<|z-i|<2\}$$

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{z^2-i^2}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\frac{2}{2(z-i)(z+i)}=\frac{i}{2(z+i)}-\frac{i}{2(z-i)}=$$

$$\frac{1}{2(\frac{z+i}{i})}-\frac{i}{2(z-i)}=\frac{1}{4(\frac{z+i}{2i})}-\frac{i}{2(z-i)}=\frac{1}{4(\frac{2i+z-i}{2i})}-\frac{i}{2(z-i)}=$$

$$\frac{1}{4(1+\frac{z-i}{2i})}-\frac{i}{2(z-i)}=\frac{1}{4(1-(-\frac{z-i}{2i}))}-\frac{i}{2(z-i)}=-\frac{i}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\frac{1}{1-(-\frac{z-i}{2i})}=-\frac{i}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-i}{2i})^n$$

Juwabı: $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}=-\dfrac{i}{2(z-i)}+\dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-i}{2i})^n$

Paydalanılǵan ádebiyatlar :

1. A. Sadullayev; G. Xudaybergenov; X. Mansurov; A. miyrasxoriv; T. To'ychiyev " Matematia analiz ursidan mısal hám máseleler kompleksi 3 (kompleks analiz) " Tas. " Ózbekstan". 2000.

2. B. Otemuratov " Kompleks analiz". " noshir" baspa 2018.

3. Dennis G. Zill; Patrick D. Shanahan " Kompleks analiz ve uygulamalari" Turkiya. 2013.

4. Dalinger V. A., Simonjenkov S. D. " Kompleksniy analiz" 2-ye izd., ispr. i dop.- Moskva : Izdatel'stvo Yurayt, 2024.- 143 s.- (Visshee obrazovanie).- ISBN 978-5-534-08399 -6.- Tekst : elektronniy // Obrazovatel'naya platforma Yurayt [sayt].- URL: https://urait. ru/bcode/539459 (data obrasheniya: 26. 06. 2024).