

**Trigonometrik funkciyalardıń anıqlamalarından paydalanıp berilgen  
teńliklerdi esaplaw hám dálillew**

*Abdullayeva Nodira Qamaraddin qizi*

*Nókis Mámleket pedagogika institutı student*

***Anotatsiya:** Bul maqalada biz, trigonometrik funkciyalardı kórip shıǵamız hám trigonometrik funksiya teoremlaridan paydalanıp, berilgen teńliklerdi esaplawdı yamasa dálillewdi kórip shıǵamız.*

***Gilt sóz:** trigonometriya, funksiya, teorema,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $chz$ ,  $shz$ ,  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ , kosinus, sinus,  $e^{iz}$ ,  $e^{-iz}$ , h.t.b.*

**1.** Trigonometrik funkciyalardıń anıqlamalarından paydalanıp tómendegi teńliklerdi esaplań.

$$ch\left(z + \frac{\pi i}{2}\right) = ishz$$

**Shıǵarılıwı.**

$$\begin{cases} e^{iz} = \cos z + i \sin z \\ e^{-iz} = \cos z - i \sin z \end{cases}$$

Sistemani bir birinen alatuǵın bolsaq tomedegi zat kelip shıǵadı.

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z \Rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i2} = \sin z$$

$$sh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \sin(iz) = \frac{e^{iiz} - e^{-iiz}}{i2} = \frac{e^{-z} - e^z}{i2} = i \frac{e^z - e^{-z}}{2} = ishz$$

$$ch\left(z + \frac{\pi i}{2}\right) = \cos\left(iz - \frac{\pi}{2}\right) = \cos iz \cos \frac{\pi}{2} - \sin iz \sin \frac{\pi}{2} = -\sin iz = ishz$$

**Juwabı.**  $ch\left(z + \frac{\pi i}{2}\right) = ishz$

**2.** Trigonometrik funkciyalardıń anıqlamalarından paydalanıp tómendegi teńliklerdi dálilleń.

$$th(iz) = itgz$$

**Sheshiliwi:**

$$thz = \frac{shz}{chz} \Rightarrow th(iz) = \frac{sh(iz)}{ch(iz)}$$

$$-ish(iz) = \sin z \Rightarrow sh(iz) = i \sin z, ch(iz) = \cos z$$

$$th(iz) = \frac{sh(iz)}{ch(iz)} = \frac{i \sin z}{\cos z} = itgz$$

**Juwabi:**  $th(iz) = itgz$

**3.** Trigonametrik funkciyalardıń anıqlamalarından paydalanıp tómendegi teńliklerdi esaplań.

$$\sin(iz) = ishz$$

**Shıǵarılıwı.**

$$\begin{cases} e^{iz} = \cos z + i \sin z \\ e^{-iz} = \cos z - i \sin z \end{cases}$$

Sistemani bir birinen alatuǵın bolsaq tomedegi zat kelip shıǵadı.

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z \Rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i2} = \sin z$$

$$sh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \sin(iz) = \frac{e^{iiz} - e^{-iiz}}{i2} = \frac{e^{-z} - e^z}{i2} = i \frac{e^z - e^{-z}}{2} = ishz$$

**Juwabi.**  $\sin(iz) = ishz$

**4.** Trigonometriyalıq funkciya táriyplerinen paydalanıp tómendegi teńlikti dálilleń.

$$ctg(iz) = -ictgz$$

**Dálilleniwi:**

$ctg(iz) = \frac{\cos(iz)}{\sin(iz)}$  dep jayıp alamız hám kosinus penen sinustıń mánislerin

qoyamız.

$$\cos(iz) = \frac{e^{-z} + e^z}{2} \quad \sin(iz) = \frac{e^{-z} - e^z}{2i}$$

$$ctg(iz) = \frac{\cos(iz)}{\sin(iz)} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} \div \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = \frac{i(e^{-z} + e^z)}{e^{-z} - e^z} \quad \text{Usı kóriniske keledi hám}$$

bólshektiń alımında bóliminde 2 ge bólip **shz** hám **chz** funksiyasına keltiremiz.

$$chz = \cos(iz) = \frac{e^{-z} + e^z}{2} \quad shz = -i \sin(iz) = -\frac{e^{-z} - e^z}{2}$$

$$\operatorname{ctg}(iz) = \frac{\cos(iz)}{\sin(iz)} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} \div \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = \frac{i(e^{-z} + e^z)}{e^{-z} - e^z} = \frac{i \left( \frac{e^{-z} + e^z}{2} \right)}{\frac{e^{-z} - e^z}{2}} = \frac{ichz}{-shz} = -ictgz$$

**Dálillendi.**

**5.**  $\cos(iz) = chz$

**Shıǵarılıwı.**

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z, \quad e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Rightarrow \cos(iz) = \frac{e^{i \cdot iz} + e^{-i \cdot iz}}{2} \Rightarrow \cos(iz) = \frac{e^{-z} + e^z}{2}$$

$$chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \cos(iz) = chz$$

**Juwabı.**  $\cos(iz) = chz$

**6.** Trigonometrik funksiyalardan paydalanıp tómenдеgi teńliklerdi dálilleń.

$$ch(iz) = \cos z$$

**Shıǵarılıwı.**

Dáslep  $ch(iz)$  ti tabıp alamız.

$$ch(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \Rightarrow ch(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$e^{iz}$  hám  $e^{-iz}$  lerdin paydalanıp  $\cos z$  ti tabamız.

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

$$2 \cos z = e^{iz} + e^{-iz} \Rightarrow \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Bul jerde korinip turıptı  $ch(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$  ekenligi.

**Juwabı.**  $ch(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z, \quad ch(iz) = \cos z$

**7.** Trigonometriyalıq funksiya táriyplerinen paydalanıp tómenдеgi teńlikti dálilleń.

$$ch(z_1 + z_2) = chz_1 * chz_2 + shz_1 * shz_2$$

**Dálilleniwi:**

$ch(z_1 + z_2) = chz_1 * chz_2 + shz_1 * shz_2$  Teńlemesin giperbolik funksiylardı anıqlaw járdeminde tastıyıqlaymız.

Giperbolik kosinus hám sinus funksiyları tómendegishe anıqlanadı :

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Endi biz  $ch(z_1 + z_2)$  ni bul anıqlamalar járdeminde jazamız :

$$ch(z_1 + z_2) = \frac{e^{z_1+z_2} + e^{-(z_1+z_2)}}{2}$$

Soń  $chz_1 * chz_2 + shz_1 * shz_2$  ni esaplaymız:

$$chz_1 * chz_2 = \left(\frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2}\right) * \left(\frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2}\right) = \frac{(e^{z_1} + e^{-z_1})(e^{z_2} + e^{-z_2})}{4}$$

$$shz_1 * shz_2 = \left(\frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2}\right) * \left(\frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2}\right) = \frac{(e^{z_1} - e^{-z_1})(e^{z_2} - e^{-z_2})}{4}$$

Endi bulardı kobeytemiz:

$$(e^{z_1} + e^{-z_1})(e^{z_2} + e^{-z_2}) = e^{z_1} e^{z_2} + e^{z_1} e^{-z_2} + e^{-z_1} e^{z_2} + e^{-z_1} e^{-z_2}$$

$$(e^{z_1} - e^{-z_1})(e^{z_2} - e^{-z_2}) = e^{z_1} e^{z_2} - e^{z_1} e^{-z_2} - e^{-z_1} e^{z_2} + e^{-z_1} e^{-z_2}$$

Endi bulardı qosamız:

$$chz_1 * chz_2 + shz_1 * shz_2 = \frac{(e^{z_1} e^{z_2} + e^{z_1} e^{-z_2} + e^{-z_1} e^{z_2} + e^{-z_1} e^{-z_2}) + (e^{z_1} e^{z_2} - e^{z_1} e^{-z_2} - e^{-z_1} e^{z_2} + e^{-z_1} e^{-z_2})}{4}$$

Árıwayılastıramız:

$$chz_1 * chz_2 + shz_1 * shz_2 = \frac{2e^{z_1+z_2} + 2e^{-(z_1+z_2)}}{4} = \frac{e^{z_1+z_2} + e^{-(z_1+z_2)}}{2}.$$

Bu  $ch(z_1 + z_2)$  ańlatpa menen birdey.

$$ch(z_1 + z_2) = \frac{e^{z_1+z_2} + e^{-(z_1+z_2)}}{2}$$

Solay etip,  $ch(z_1 + z_2) = chz_1 * chz_2 + shz_1 * shz_2$  ekenligi dálillendi.

**8.** Trigonametrik funksiylardıń anıqlamalarınan paydalanıp tómendegi teńliklerdi esaplań.

$$\cos z_1 + \cos z_2 = 2 \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2}$$

**Shıǵarılıwı.**

$$\cos z_1 = \cos\left(\frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{z_1 - z_2}{2}\right) = \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2} - \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \frac{z_1 - z_2}{2}$$

$$\cos z_2 = \cos\left(\frac{z_1 + z_2}{2} - \frac{z_1 - z_2}{2}\right) = \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2} + \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \frac{z_1 - z_2}{2}$$

$$\begin{cases} \cos z_1 = \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2} - \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \frac{z_1 - z_2}{2} \\ \cos z_2 = \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2} + \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \frac{z_1 - z_2}{2} \end{cases}$$

Sistemani qosatin bolsaq tomedegi zat kelip shıǵadı.

$$\begin{aligned} \cos z_1 + \cos z_2 &= \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2} - \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \frac{z_1 - z_2}{2} + \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2} + \\ &+ \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \frac{z_1 - z_2}{2} = 2 \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2} \end{aligned}$$

**Juwabı.**  $\cos z_1 + \cos z_2 = 2 \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2}$

**9.** Trigonametrik funkciyalardıń anıqlamalarınan paydalanıp tómendegi teńliklerdi esaplań.

$$sh\left(z + \frac{\pi i}{2}\right) = ichz$$

**Shıǵarılıwı.**

$$\begin{cases} e^{iz} = \cos z + i \sin z \\ e^{-iz} = \cos z - i \sin z \end{cases}$$

Sistemani bir birinen alatuǵın bolsaq tomedegi zat kelip shıǵadı.

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z \Rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i2} = \sin z$$

$$sh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \sin(iz) = \frac{e^{iiz} - e^{-iiz}}{i2} = \frac{e^{-z} - e^z}{i2} = i \frac{e^z - e^{-z}}{2} = ish z$$

$$sh\left(z + \frac{\pi i}{2}\right) = -i \sin\left(iz - \frac{\pi}{2}\right) = -i\left(\sin iz \cos \frac{\pi}{2} - \cos iz \sin \frac{\pi}{2}\right) = -i(-\cos iz) = i \cos iz = ichz$$

**Juwabı.**  $sh\left(z + \frac{\pi i}{2}\right) = i \cos iz = ichz$

**Paydalanilgan ádebiyatlar :**

1. A. Sadullayev; G. Xudaybergenov; X. Mansurov; A. miyrasxoriv; T. To'ychiyev " Matematika analiz ursoridan misal ham máseleler kompleksi 3 (kompleks analiz) " Tas. " Ózbekstan". 2000.
2. B. Otemuratov " Kompleks analiz". " noshir" baspa 2018.
3. Dennis G. Zill; Patrick D. Shanahan " Kompleks analiz ve uygulamalari" Turkiya. 2013.
4. Dalinger V. A., Simonjenkov S. D. " Kompleksniy analiz" 2-ye izd., ispr. i dop.- Moskva : Izdatel'stvo Yurayt, 2024.- 143 s.- (Visshee obrazovanie).- ISBN 978-5-534-08399 -6.- Tekst : elektronniy // Obrazovatel'naya platforma Yurayt [sayt].- URL: <https://urait.ru/bcode/539459> (data obrasheniya: 26. 06. 2024).